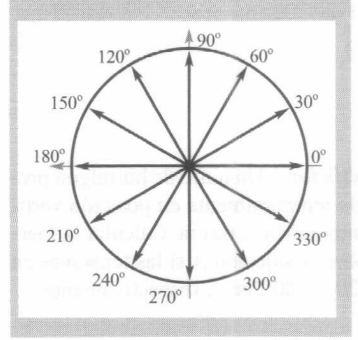
10.3 El producto escalar de dos vectores

El producto escalar

Hasta ahora hemos estudiado dos operaciones con vectores, la suma y la multiplicación por un escalar, que producen como resultado un vector. En esta sección introducimos una tercera operación, el **producto escalar**, cuyo resultado no es un vector, sino un escalar (un número).

EXPLORACIÓN

Interpretación de un producto escalar La figura muestra varios vectores en el círculo unidad. Calcular los productos escalares de varias parejas y el ángulo entre los vectores de cada pareja elegida. Enunciar una conjetura acerca de la relación entre el producto escalar de dos vectores y el ángulo entre ellos.



DEFINICIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Nota. El producto escalar se llama también **producto interno**.

TEOREMA 10.4 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Sean **u, v** y **w** vectores en el plano o en el espacio, y c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ — Propiedad conmutativa
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ — Propiedad distributiva
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

Demostración: Para probar la primera propiedad, tomamos $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3\\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

En cuanto a la quinta, sea $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\\ &= \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2\\ &= \|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

Las demostraciones de las restantes propiedades se dejan al cuidado del lector. □

EJEMPLO 1 Cálculo de productos escalares

Dados $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 8 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle -4, 3 \rangle$, calcular

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *b)* $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ *c)* $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$ *d)* $\|\mathbf{w}\|^2$

Solución:

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle = 2(5) + (-2)(8) = -6$

b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -6\langle -4, 3 \rangle = \langle 24, -18 \rangle$

c) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 2(-6) = -12$

d) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \langle -4, 3 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle = (-4)(-4) + (3)(3) = 25$

Nótese que el resultado del apartado *b)* es un *vector*, mientras que los resultados restantes son *escalares*. □

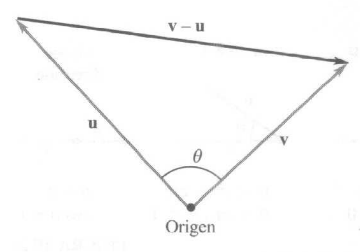


FIGURA 10.24
Ángulo entre dos vectores.

Ángulo entre dos vectores

El ángulo entre dos vectores es el ángulo θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ entre sus respectivos vectores en posición canónica (Figura 10.24). El próximo teorema enseña cómo calcularlo mediante el producto escalar. (Téngase en cuenta que no está definido el ángulo entre el vector cero y otro vector.)

TEOREMA 10.5 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

El ángulo θ entre los vectores **u** y **v**, ambos no nulos, viene dado por

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

Demostración: Consideremos el triángulo formado por los vectores **u, v** y **v − u** (Figura 10.24). Por la ley de los cosenos,

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

Por las propiedades del producto escalar, el miembro de la izquierda se puede transformar así:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ley de los cosenos obtenemos finalmente

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 \; \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

$$-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \qquad \square$$

Si se conoce el ángulo entre dos vectores, reescribiendo el Teorema 10.5 como

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta}$$ Forma alternativa del producto escalar

se dispone de un nuevo método para calcular el producto escalar. Es fácil darse cuenta de que, al ser $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ siempre positivos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\cos\theta$ tendrán siempre el mismo signo. La Figura 10.25 muestra las posibles orientaciones de dos vectores.

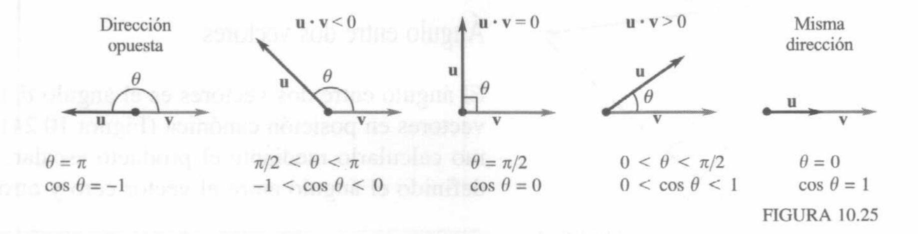


FIGURA 10.25

DEFINICIÓN DE VECTORES ORTOGONALES

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

De esta definición se sigue que el vector cero es ortogonal a todo vector $\mathbf{u}$, ya que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$. Además, para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, vemos que $\cos\theta = 0$ si y sólo si $\theta = \pi/2$. Por tanto, el Teorema 10.5 nos lleva a la conclusión de que dos vectores no nulos son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

| Nota. Las palabras «perpendicular», «ortogonal» y «normal» significan esencialmente lo mismo: formar ángulo recto. Sin embargo, suele decirse que dos vectores son *ortogonales*, que dos rectas o planos son *perpendiculares* y que un vector es *normal* a una recta o a un plano.

EJEMPLO 2 Ángulo entre dos vectores

Dados $\mathbf{u} = \langle 3, -1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 0, 2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, -1, -2\rangle$, y $\mathbf{z} = \langle 2, 0, -1\rangle$, calcular el ángulo entre cada uno de los pares de vectores siguientes.

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ *b)* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ *c)* $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$.

Solución:

a) $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \dfrac{-12 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \dfrac{-8}{2\sqrt{14}\sqrt{5}} = \dfrac{-4}{\sqrt{70}}$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, $\theta = \arccos \dfrac{-4}{\sqrt{70}} \approx 2{,}069$ radianes

$$b) \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{3+1-4}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{0}{2\sqrt{84}} = 0$$

Como $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 0$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son *ortogonales*. Además, $\theta = \pi/2$.

$$c) \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{z}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{z}\|} = \frac{-8+0-2}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-10}{\sqrt{100}} = -1$$

En consecuencia, $\theta = \pi$. Nótese que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$ son paralelos, con $\mathbf{v} = -2\mathbf{z}$. □

Cosenos directores

FIGURA 10.26
Ángulos directores.

Para un vector en el plano hemos visto que es conveniente medir la dirección en términos del ángulo, medido en sentido contrario al de giro de las agujas de un reloj, *desde* el semieje x positivo *hasta* el vector. En el espacio es conveniente medirla en términos de los ángulos entre el vector $\mathbf{v}$ (no nulo) y los tres vectores unitarios **i, j** y **k**, como muestra la Figura 10.26. Los ángulos α, β, γ son los **ángulos de dirección** (o **ángulos directores**) de $\mathbf{v}$, y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los **cosenos directores** de $\mathbf{v}$. De

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{i}\|\cos\alpha = \|\mathbf{v}\|\cos\alpha$$

y

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle\cdot\langle 1, 0, 0\rangle = v_1$$

se sigue que $\cos\alpha = v_1/\|\mathbf{v}\|$. Por un argumento similar con los vectores **j** y **k** se obtiene

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} \qquad \alpha \text{ es el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{i}$$

$$\cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} \qquad \beta \text{ es el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{j}$$

$$\cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} \qquad \gamma \text{ es el ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{k}$$

Por consiguiente, cualquier vector $\mathbf{v}$ no nulo en el espacio, tiene la forma normalizada

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{i} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{j} + \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{k} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

y como $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es un vector unitario, resulta

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

EJEMPLO 3 Cálculo de los ángulos directores

Calcular los cosenos y ángulos directores del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y comprobar que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Solución:

Como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$, tenemos

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 68{,}2^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{29}} \quad \Longrightarrow \quad \beta \approx 56{,}1^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{29}} \quad \Longrightarrow \quad \gamma \approx 42{,}0^\circ$$

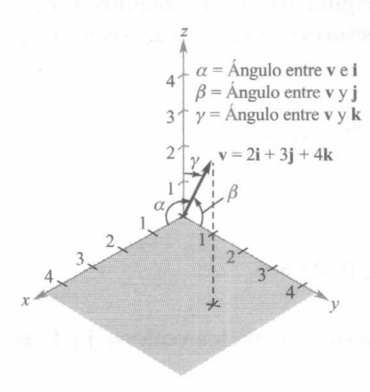


FIGURA 10.27
Ángulos directores de **v**.

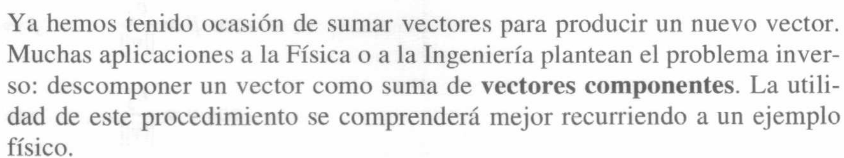
La suma de los cuadrados de los cosenos directores es

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} \\ &= \frac{29}{29} \\ &= 1\end{aligned}$$

(Véase Figura 10.27.) □



Proyecciones y vectores componentes



Ya hemos tenido ocasión de sumar vectores para producir un nuevo vector. Muchas aplicaciones a la Física o a la Ingeniería plantean el problema inverso: descomponer un vector como suma de **vectores componentes**. La utilidad de este procedimiento se comprenderá mejor recurriendo a un ejemplo físico.

Consideremos la lancha sobre una rampa inclinada de la Figura 10.28. La fuerza de la gravedad $\mathbf{F}$ empuja la lancha *hacia abajo* y *contra* la rampa. Estas dos fuerzas, $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, son ortogonales y se llaman los vectores componentes de $\mathbf{F}$.

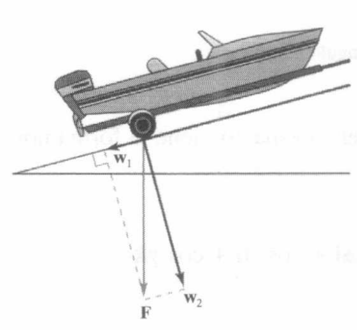


FIGURA 10.28
La fuerza de la gravedad empuja la lancha hacia abajo y contra la rampa.

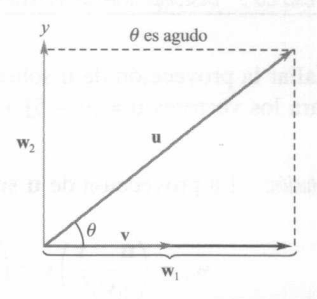
$$\mathbf{F} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \qquad \text{Vectores componentes de } \mathbf{F}$$

Las fuerzas $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ ayudan a analizar el efecto de la gravedad sobre la lancha. Por ejemplo, $\mathbf{w}_1$ indica la fuerza necesaria para evitar que la lancha descienda por la rampa y $\mathbf{w}_2$ lo que deben soportar los neumáticos.

DEFINICIÓN DE PROYECCIÓN Y DE LOS VECTORES COMPONENTES

Sean **u** y **v** vectores no nulos. Sea, además, $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a **v** (Figura 10.29).

1. $\mathbf{w}_1$ se llama la **proyección de u** sobre **v** o el **vector componente de u** en la dirección de **v**, y se denota por $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.
2. $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ se llama el **vector componente de u** ortogonal a **v**.



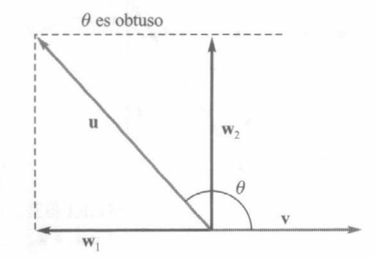


FIGURA 10.29
$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ = proyección de **u** sobre **v** = vector componente de **u** en la dirección de **v**.
$\mathbf{w}_2$ = vector componente de **u** ortogonal a **v**.

*EJEMPLO 4 Cálculo del vector componente de **u** ortogonal a **v***

Calcular el vector componente de $\mathbf{u} = \langle 7, 4\rangle$ ortogonal a $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$, siendo $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle 4, 6\rangle$ y

$$\mathbf{u} = \langle 7, 4\rangle = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

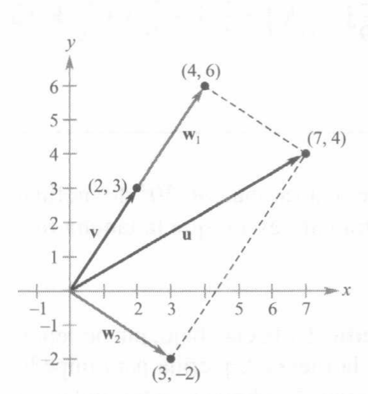


FIGURA 10.30
$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

Solución: Como $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ es paralelo a **v**, se sigue que $\mathbf{w}_2$ es el vector componente de **u** ortogonal a **v**. Así pues,

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \langle 7, 4\rangle - \langle 4, 6\rangle = \langle 3, -2\rangle$$

Compruebe como ejercicio que $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a **v**, tal como muestra la Figura 10.30. □

El Ejemplo 4 pone de manifiesto que es fácil hallar el vector componente $\mathbf{w}_2$ una vez conocida la proyección $\mathbf{w}_1$ de **u** sobre **v**. Para calcular esta proyección el teorema siguiente utiliza el producto escalar (para su demostración véase el Ejercicio 68).

Nota. Nótese la distinción entre los términos «componente» y «vector componente». Por ejemplo, usando los vectores unitarios canónicos con $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, u_1 es la componente de **u** en la dirección de **i** y $u_1\mathbf{i}$ es el vector componente de **u** en la dirección de **i**.

TEOREMA 10.6 LA PROYECCIÓN MEDIANTE PRODUCTO ESCALAR

Si **u** y **v** son vectores no nulos, la proyección de **u** sobre **v** viene dada por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}$$

La proyección de **u** sobre **v** se puede escribir como un múltiplo escalar de un vector unitario en la dirección de **v**:

$$\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = (k)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{u}\|\cos\theta$$

El número **k** se llama la **componente de u** en la dirección de **v**.

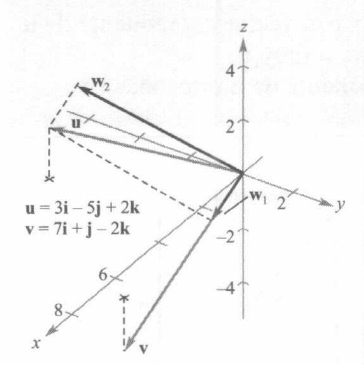
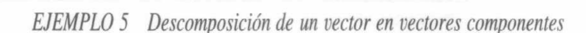


FIGURA 10.31
$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

EJEMPLO 5 Descomposición de un vector en vectores componentes



Hallar la proyección de **u** sobre **v** y el vector componente de **u** ortogonal a **v**, para los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. (Véase Figura 10.31.)

Solución: La proyección de **u** sobre **v** es

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{12}{54}\right)(7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}$$

El vector componente de **u** ortogonal a **v** es el vector

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - \left(\frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}\right) = \frac{13}{9}\mathbf{i} - \frac{47}{9}\mathbf{j} + \frac{22}{9}\mathbf{k} \quad \square$$

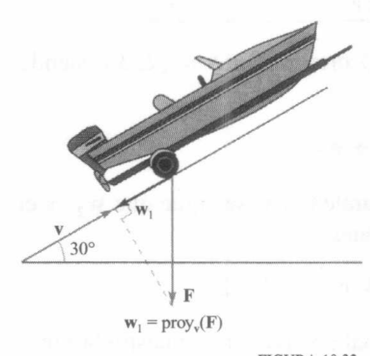


FIGURA 10.32

EJEMPLO 6 Cálculo de una fuerza

Una lancha de 600 libras se encuentra sobre una rampa con 30° de inclinación (Figura 10.32). ¿Qué fuerza es necesaria para evitar que la lancha ruede cuesta abajo?

Solución: Como la fuerza de la gravedad es vertical y hacia abajo, puede representarse por el vector $\mathbf{F} = -600\mathbf{j}$. Para hallar la fuerza requerida para impedir que la lancha descienda por la rampa, proyectamos **F** sobre un vector unitario **v** en la dirección de la rampa:

$$\mathbf{v} = \cos 30^\circ\mathbf{i} + \text{sen } 30^\circ\mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$ Vector unitario en la dirección de la rampa

Por tanto, la proyección de **F** sobre **v** es

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = (-600)\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{v} = -300\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)$$

La magnitud de esta fuerza es 300, así que la fuerza pedida es de 300 libras. $\square$

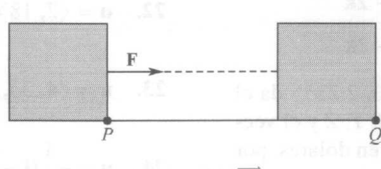
Trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ que actúa a lo largo de la recta de movimiento de un objeto viene dado por

$$W = (\text{magnitud de la fuerza})\ (\text{distancia}) = \|\mathbf{F}\|\ \|\overrightarrow{PQ}\|$$

como se muestra en la Figura 10.33*a*. Si la fuerza constante $\mathbf{F}$ no está dirigida en la dirección del movimiento, la Figura 10.33*b* indica que el trabajo W realizado por la fuerza es

$$W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\mathbf{F}\|\ \|\overrightarrow{PQ}\| = (\cos\theta)\|\mathbf{F}\|\ \|\overrightarrow{PQ}\| = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$$



F
θ
$\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}$ F
P
Q



a) La fuerza actúa en la dirección del movimiento

b) La fuerza actúa formando un ángulo θ con la dirección del movimiento

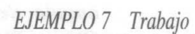
FIGURA 10.33

Resumimos esta noción de trabajo en el cuadro siguiente.

DEFINICIÓN DE TRABAJO

El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ cuando su punto de aplicación se desplaza a lo largo del vector $\overrightarrow{PQ}$ viene dada por una de estas expresiones:

1. $W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\mathbf{F}\|\ \|\overrightarrow{PQ}\|$ Forma de proyección
2. $W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$ Forma de producto escalar



EJEMPLO 7 Trabajo

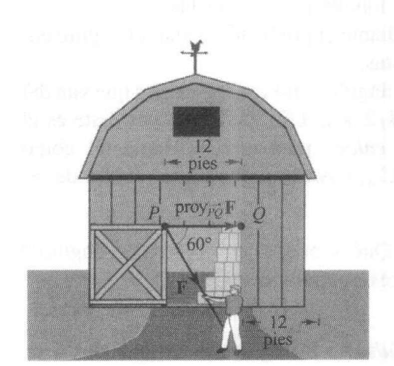


FIGURA 10.34

Para cerrar una puerta corredera, una persona tira de una cuerda con una fuerza constante de 50 libras con un ángulo de 60° (Figura 10.34). Calcular el trabajo realizado para mover la puerta 12 pies hasta que queda cerrada.

Solución: Por proyección podemos hallar el trabajo realizado haciendo

$$\begin{aligned} W &= \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\mathbf{F}\|\ \|\overrightarrow{PQ}\| \\ &= \cos(60°)\ \|\mathbf{F}\|\ \|\overrightarrow{PQ}\| \\ &= \frac{1}{2}(50)(12) \\ &= 300 \text{ libras-pies} \end{aligned}$$

□

Ejercicios de la Sección 10.3

En los Ejercicios 1-6, calcular *a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, *b*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, *c*) $\|\mathbf{u}\|^2$, *d*) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$, y *e*) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$

1. $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$

2. $\mathbf{u} = \langle 5, 12 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$

3. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 5 \rangle$

4. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

7. ***Ingresos*** El vector $\mathbf{u} = \langle 3.240, 1.450, 2.235 \rangle$ da el número de unidades de los productos *X, Y, Z* y el vector $\mathbf{v} = \langle 2{,}22, 1{,}85, 3{,}25 \rangle$ da el precio, en dólares, por unidad de cada uno de esos productos. Calcular el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y explicar qué información ofrece.

8. ***¿Verdadero o falso?*** Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq 0$, entonces ¿es necesariamente cierto que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

En los Ejercicios 9 y 10, calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

9. $\|\mathbf{u}\| = 8$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, y el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/3$.

10. $\|\mathbf{u}\| = 40$, $\|\mathbf{v}\| = 25$, y el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $5\pi/6$.

En los Ejercicios 11-18, hallar el ángulo θ entre los vectores.

11. $\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle$

12. $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$

13. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

14. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$

15. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1 \rangle$

16. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

18. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. ***Programación*** Escribir un programa que, dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en forma de componentes, calcule *a*) $\|\mathbf{u}\|$, *b*) $\|\mathbf{v}\|$, y *c*) el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

20. Usando el Ejercicio 19 hallar el ángulo entre los vectores

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -7, 5 \rangle$

b) $\mathbf{u} = \langle 8, -4, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 2 \rangle$

En los Ejercicios 21-28, averiguar si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, paralelos o ninguna de ambas cosas.

21. $\mathbf{u} = \langle 4, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

22. $\mathbf{u} = \langle 2, 18 \rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{6} \right\rangle$

23. $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right\rangle$

24. $\mathbf{u} = -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

25. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

27. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

28. $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0 \rangle$

29. Probar, usando vectores, que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

30. ***Ángulo de enlace*** Consideremos un tetraedro regular con vértices $(0, 0, 0)$, $(k, k, 0)$, $(k, 0, k)$ y $(0, k, k)$, donde k denota un número real positivo.

a) Dibujar el tetraedro.

b) Calcular la longitud de sus aristas.

c) Hallar, mediante el producto escalar, el ángulo entre dos aristas.

d) Calcular el ángulo entre los segmentos que van del centroide $(k/2, k/2, k/2)$ a dos vértices. Éste es el *ángulo de enlace* para una molécula tal como CH_4, o $PbCl_4$, cuya estructura tiene forma de tetraedro.

31. ***Para pensar*** ¿Qué se puede decir acerca del ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, si

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$? *b*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$? *c*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$?

32. ***¿Verdadero o falso?*** Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales a $\mathbf{w}$, ¿es $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{w}$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, explicar por qué es falso o dar un ejemplo que confirme su falsedad.

33. Consideremos los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos\beta, \operatorname{sen}\beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$. Calcular su producto escalar y usarlo para demostrar la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

34. Hallar los vectores tangentes unitarios a las curvas $y_1 = x^2$ e $y^2 = x^{1/3}$ en sus puntos de intersección. Calcular los ángulos entre las curvas en esos puntos.

En los Ejercicios 35-38, hallar los cosenos directores de **u** y verificar que la suma de sus cuadrados es 1.

35. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **36.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

37. $\mathbf{u} = \langle 0, 6, -4 \rangle$ **38.** $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$

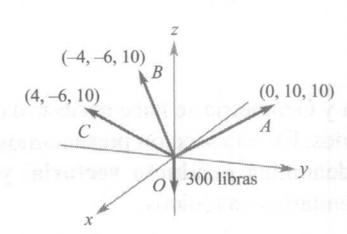
En los Ejercicios 39 y 40, usar una calculadora gráfica para hallar la magnitud y los ángulos directores de la resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con puntos iniciales en el origen. Se dan la magnitud y el punto terminal de cada vector.

	Vector	*Magnitud*	*Punto final*
39.	$\mathbf{F}_1$	50 lb	(10, 5, 3)
	$\mathbf{F}_2$	80 lb	(12, 7, −5)
40.	$\mathbf{F}_1$	300 N	(−20, −10, 5)
	$\mathbf{F}_2$	100 N	(5, 15, 0)

41. Hallar el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

42. Hallar el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de una de sus caras.

43. ***Cables que soportan carga*** Una carga está suspendida de tres cables, como muestra la figura. Calcular los ángulos directores del cable *OA*.



44. ***Cables que soportan carga*** Hallar el peso de la carga en el Ejercicio 43 si la tensión en el cable *OA* es de 200 newtons.

En los Ejercicios 45-48, *a*) proyectar **u** sobre **v**, y *b*) calcular el vector componente de **u** ortogonal a **v**.

45. $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1 \rangle$ **46.** $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 2 \rangle$

47. $\mathbf{u} = \langle 2, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 4 \rangle$ **48.** $\mathbf{u} = \langle 0, 4, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 2, 3 \rangle$

49. ***Programación*** Dados dos vectores **u** y **v** en forma de componentes, escribir un programa que exprese en componentes la proyección de **u** sobre **v**.

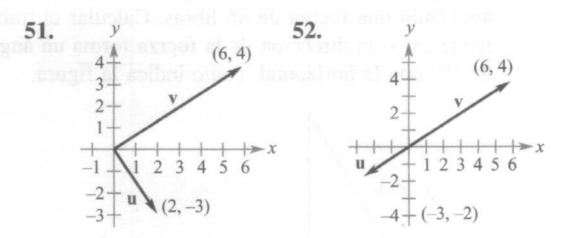
50. Usar el programa del ejercicio anterior para calcular la proyección de **u** sobre **v**.

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 2 \rangle$

b) $\mathbf{u} = \langle 5, 6, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 3, 4 \rangle$

Para pensar En los Ejercicios 51 y 52, usar la figura para hallar mentalmente la proyección de **u** sobre **v**. (Se dan las coordenadas de los puntos terminales en posición canónica.) Verificar los resultados analíticamente.

51. **52.**



53. ***Para pensar*** *a*) ¿Qué se puede decir de dos vectores **u** y **v** sabiendo que la proyección de **u** sobre **v** es **u**? *b*) ¿Y si es **0**?

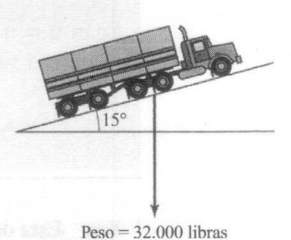
54. ***Para pensar*** Si la proyección de **u** sobre **v** tiene la misma longitud que la proyección de **v** sobre **u**, ¿es cierto que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$?

En los Ejercicios 55-58, hallar dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector **u**. (La solución no es única.)

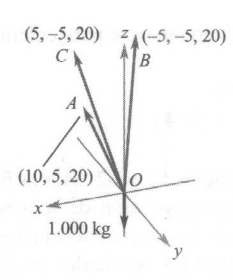
55. $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$ **56.** $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -2 \rangle$ **58.** $\mathbf{u} = \langle 0, -3, 6 \rangle$

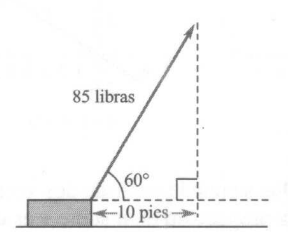
59. ***Fuerza de los frenos*** Un camión de 32.000 libras está aparcado en una calle con 15° de pendiente (figura). Supuesto que la única fuerza actuante es la de la gravedad, calcular *a*) la fuerza requerida para impedir que el camión ruede cuesta abajo, y *b*) la fuerza perpendicular al suelo.



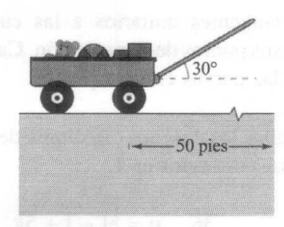
60. ***Cables que soportan carga*** Calcular la magnitud de la proyección del cable *OA* de la figura de la página siguiente sobre el semieje *z* positivo.



61. ***Trabajo*** Se arrastra 10 pies por el suelo un objeto aplicando una fuerza de 85 libras. Calcular el trabajo realizado si la dirección de la fuerza forma un ángulo de 60° con la horizontal, como indica la figura.



62. ***Trabajo*** Un vagón de juguete es arrastrado por un niño que tira con una fuerza de 15 libras de una varilla que forma 30° con la horizontal (véase figura). Calcular el trabajo realizado al arrastrarlo 50 pies.



Trabajo En los Ejercicios 63 y 64, calcular el trabajo realizado al mover la partícula de P a Q si la magnitud y la dirección de la fuerza vienen dadas por **v**.

63. $P(0, 0, 0)$, $Q(4, 7, 5)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 4, 8\rangle$

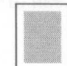
64. $P(1, 3, 0)$, $Q(-3, 5, 10)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

65. Demostrar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

66. Probar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

67. Demostrar la desigualdad triangular $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

68. Demostrar el Teorema 10.6.



10.4 El producto vectorial de dos vectores en el espacio

CONTENIDO
- El producto vectorial
- El producto mixto (o producto escalar triple)

El producto vectorial

En muchos problemas de Física, Ingeniería y Geometría se hace necesario calcular un vector ortogonal a dos vectores dados. En esta sección presentamos un producto que produce un vector así. Se denomina **producto vectorial** y se define fácilmente utilizando los vectores unitarios canónicos.

DEFINICIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES EN EL ESPACIO

Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vectores en el espacio. El producto vectorial de **u** y **v** es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Nota. Esta definición es aplicable solamente a vectores en tres dimensiones. El producto vectorial de vectores en el plano no está definido.

Una manera conveniente de calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ consiste en usar determinantes. (Esta forma de determinante 3×3 se usa sólo como ayuda para memorizar la